Модуль 2. Тема 4. Занятие 2.

NN° 4342, 4352, 4359, 4362, 4364, 4363

№4342 Вычислить $\iint\limits_S z\,dS$, где S — часть поверхности $x^2+z^2=2az,\ a>0$ вырезанная поверхностью $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

$$z = a+\sqrt{a^2-x^2},\quad z'_x = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},\quad z'_y = 0 \Rightarrow$$

$$dS = \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx\,dy$$

$$\begin{cases}(x^2+z^2)^2 = 4a^2z^2\\ z^2 = x^2+y^2\end{cases} \rightarrow (2x^2+y^2)^2 = 4a^2(x^2+y^2)$$

Пусть $\Omega \subset E^2$ область, ограниченная кривой $(2x^2+y^2)^2 = 4a^2(x^2+y^2) \Rightarrow$

$$\iint\limits_S z\,dS = \iint\limits_\Omega \left(a+\sqrt{a^2-x^2}\right)\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx\,dy = \iint\limits_\Omega \left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+a\right)dx\,dy =$$

$$= \Bigg/ \begin{matrix} x = r\cos\varphi, & 0\le\varphi\le 2\pi \\ y = r\sin\varphi, & 0\le r\le \frac{2a}{1+\cos^2\varphi}\end{matrix} \ \Big/\!\!\Big/ \ \begin{matrix} r^4(1+\cos^2\varphi)^2 = 4a^2r^2 \\ r(1+\cos^2\varphi) = 2a \Rightarrow r = \frac{2a}{1+\cos^2\varphi}\end{matrix} \Bigg/ =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{2a}{1+\cos^2\varphi}} \left\{\frac{a^2 r}{\sqrt{a^2-r^2\cos^2\varphi}} + ar\right\}dr = I_1 + I_2$$

$$I_1 = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{2a}{1+\cos^2\varphi}} r\,dr = 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4a^2\,d\varphi}{(1+\cos^2\varphi)^2} = 8a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{(1+\cos^2\varphi)^2}$$

$$I_2 = 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{\frac{2a}{1+\cos^2\varphi}} \frac{r}{\sqrt{a^2-r^2\cos^2\varphi}}\,dr = -4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\sqrt{a^2-r^2\cos^2\varphi}\,\Bigg|_0^{\frac{2a}{1+\cos^2\varphi}} =$$

$$= 4a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{1-\sqrt{1-\frac{4\cos^2\varphi}{(1+\cos^2\varphi)^2}}\right\}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = 4a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{1-\frac{1-\cos^2\varphi}{1+\cos^2\varphi}\right\}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} =$$

$$= 8a^3\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{1+\cos^2\varphi} \Rightarrow$$

$$\iint\limits_S z\,dS = 8a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2+\cos^2\varphi}{(1+\cos^2\varphi)^2}\,d\varphi =$$

$$= 8a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi\,(2+\cos^2\varphi)}{(1+\cos^2\varphi)^2} \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \left| \begin{matrix} u = \operatorname{tg}\varphi \\ 1+\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi} \end{matrix} \right| =$$

$$= 8a^3 \int_0^{+\infty} \frac{2u^2+3}{(u^2+2)^2}\,du = 8a^3 \int_0^{+\infty} \frac{2u^2+4-1}{(u^2+2)^2}\,du = 16a^3 \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2+2} - 8a^3 \int_0^{+\infty} \frac{du}{(u^2+2)^2} =$$

$$16a^3 \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2+2} = 16a^3 \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{2}} \Big|_0^{+\infty} = 8\sqrt{2}a^3 \frac{\pi}{2} = 4\sqrt{2}\pi a^3.$$

$$8a^3 \int_0^{+\infty} \frac{du}{(u^2+2)^2} = 4a^3 \int_0^{+\infty} \frac{(u^2+2)-u^2}{(u^2+2)^2}\,du = 4a^3 \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2+2} - 2a^3 \int_0^{+\infty} u \cdot \frac{d(u^2+2)}{(u^2+2)^2} =$$

$$= 4a^3 \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2+2} - 2a^3 \left(\cancelto{0}{-\frac{u}{u^2+2}\Big|_0^{+\infty}} + \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2+2} \right) = 2a^3 \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2+2} =$$

$$= 2a^3 \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{2}} \Big|_0^{+\infty} = \sqrt{2}a^3 \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi a^3$$

значит $= 4\sqrt{2}\pi a^3 - \frac{\sqrt{2}}{2}\pi a^3 = \frac{7\sqrt{2}}{2}\pi a^3$

$$\iint\limits_S z\,ds = \frac{7\sqrt{2}}{2}\pi a^3.$$

№4352 Найти массу параболической оболочки $z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $0 \le z \le 1$ плотность которой меняется по закону $\rho = z$.

Искомая масса определяется формулой $\iint\limits_S z\,ds$,

где S – боковая сторона параболоида

Для S: $z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $z'_x = x$, $z'_y = y$ $\Rightarrow$

$$ds = \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy = \sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy \Rightarrow$$

$$\iint\limits_S z\,ds = \frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le 2}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy = \left| \begin{matrix} x = r\cos\varphi, & 0\le\varphi\le 2\pi \\ y = r\sin\varphi, & 0 \le r \le \sqrt{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r^2\sqrt{1+r^2}\,r\,dr = \pi\int_0^{\sqrt{2}} r^3\sqrt{1+r^2}\,dr =$$

$$= \{r^2 = t\} = \frac{\pi}{2}\int_0^2 t\sqrt{1+t}\,dt = \left\{ \begin{matrix} \sqrt{1+t} = u \\ t = u^2-1 \end{matrix} \quad dt = 2u\,du \right\} =$$

$$= \pi\int_1^{\sqrt{3}}(u^4-u^2)\,du = \pi\left(\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}\right)\Big|_1^{\sqrt{3}} = \pi\left(\frac{(\sqrt{3})^5}{5}-\frac{(\sqrt{3})^3}{3}\right) - \pi\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \pi\sqrt{3}\left(\frac{9}{5}-1\right) + \frac{2\pi}{15} = \frac{4\pi\sqrt{3}}{5} + \frac{2\pi}{15} = \frac{2\pi}{15}(1+6\sqrt{3}) \Rightarrow$$

$$\iint\limits_S z\,ds = \frac{2\pi}{15}(1+6\sqrt{3}).$$

№4362 Вычислить $I=\iint\limits_S (z\,dxdy + x\,dydz + y\,dzdx)$, где S – внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Вычислим $I_1=\iint\limits_S z\,dxdy$. Плоскость $z=0$ пересекается со сферой S по окружности $\gamma=\{(x,y):\ x^2+y^2=a^2\}$, которая является гладким краем компактов:

$$S^+=\{(x,y,z):\ z^+=\sqrt{a^2-x^2-y^2},\ (x,y)\in D\},$$ см. далее!

$$S^-=\{(x,y,z):\ z^-=-\sqrt{a^2-x^2-y^2},\ (x,y)\in D\},$$

$$D=\{(x,y):\ x^2+y^2\le a^2\}.$$

Ориентация на кривой γ должна быть согласована с ориентацией компактов $\overline{S^+\setminus\gamma}$, $\overline{S^-\setminus\gamma}$. Эти ориентации противоположны.

Поэтому
$$I_1=\iint\limits_{S^+} z\,dxdy+\iint\limits_{S^-} z\,dxdy=\iint\limits_D z^+dxdy-\iint\limits_D z^-dxdy=$$
$$=2\iint\limits_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy=\left|\begin{array}{ll} x=r\cos\varphi, & 0\le\varphi\le 2\pi \\ y=r\sin\varphi, & 0\le r\le a\end{array}\right|=$$
$$=2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}\,dr=\frac{4}{3}\pi\,(a^2-r^2)\Big|_a^0=\frac{4}{3}\pi a^3.$$

Аналогично можно показать, что $\iint\limits_S x\,dydz=\iint\limits_S y\,dzdx=\frac{4}{3}\pi a^3\Rightarrow$
$$I=4\pi a^3.$$

№4364. Вычислить $I=\iint\limits_S (x-y)\,dxdy+(y-z)\,dydz+(z-x)\,dxdz$, где S – внешняя сторона конической поверхности $x^2+y^2=z^2$, $0<z<h$.

Поверхность S проектируется на круг $D=\{(x,y):\ x^2+y^2\le h^2\}$.

У подынтегральной функции имеется особая точка – начало координат $(0;0;0)$. Поэтому вектор нормали в ней не определён. Множество $\{(0;0;0)\}$ имеет меру нуль, значит им можно пренебречь и

$$I = \iint\limits_{S\setminus\{(0;0;0)\}} \left((y-z)\cos\alpha + (z-x)\cos\beta + (x-y)\cos\gamma \right) dS ,$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора единичной нормали $\bar{n}$ в точках множества $S\setminus\{(0;0;0)\}$. Множество $S\setminus\{(0;0;0)\}$ ориентируется выбором нормали $\bar{n}$. По условию имеем внешнюю сторону поверхности. Поэтому $\bar{n}$ образует с ортом $\bar{k}$ оси OZ тупой угол $\Rightarrow$

$$\cos\alpha = \frac{z'_x}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}, \quad \cos\beta = \frac{z'_y}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}},$$

$$\cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}.$$

$$z = \sqrt{x^2+y^2}, \quad dS = \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\, dx\,dy .$$

Заменяя поверхностный интеграл двойным, имеем:

$$I = \iint\limits_D \left\{ (y - z(x,y))\, z'_x + (z(x,y) - x)\, z'_y + y - x \right\} dx\,dy =$$

$$= 2\iint\limits_D (y-x)\,dx\,dy = \left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi, \ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ y = r\sin\varphi, \ 0 \le r \le h \end{array} \right| =$$

$$= 2\int\limits_0^{2\pi} (\sin\varphi - \cos\varphi)\,d\varphi \int\limits_0^h r^2\,dr = \frac{2}{3}h^3 \int\limits_0^{2\pi} (\sin\varphi - \cos\varphi)\,d\varphi \equiv 0 \Rightarrow$$

$$I \equiv 0.$$

№4359 Вычислить $F(t) = \iint\limits_{x+y+z=t} f(x,y,z)\,dS$, где

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2 - z^2, & \text{если } x^2+y^2+z^2 \le 1 \\ 0, & \text{если } x^2+y^2+z^2 > 1. \end{cases}$$

Перепишем $x+y+z=t$ в виде $\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{z}{\sqrt{3}} = \frac{t}{\sqrt{3}}$

Если $(x,y,z) \in$ граница $(x^2+y^2+z^2 \le 1) \cap \left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{z}{\sqrt{3}} - \frac{t}{\sqrt{3}} \right)$, то

$$\begin{cases} x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow t = \sqrt{3} \\ x = y = z = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow t = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Это означает, что при $|t| > \sqrt{3}$ $\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2 \le 1\} \cap \{(x,y,z): x+y+z=t\} =$

$= \varnothing$,

при $|t| \le \sqrt{3}$ $\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2 \le 1\} \cap \{(x,y,z): x+y+z=t\} \ne$

$\ne \varnothing$.

$dS = \sqrt{3}\, dx\,dy$, ибо $z = t - x - y \Rightarrow z'_x = -1$ и $z'_y = -1$.

Пусть $|t| > \sqrt{3}$:

$$F(t) = \sqrt{3} \iint\limits_{x+y+z=t} 0 \cdot dx\,dy = 0.$$

Пусть $|t| \le \sqrt{3}$:

$$F(t) = \sqrt{3} \iint\limits_{\Omega} \left\{1 - x^2 - y^2 - (t-x-y)^2\right\} dx\,dy =$$

$$= \sqrt{3} \iint\limits_{\Omega} \left\{(1-t^2) - 2x^2 - 2y^2 + 2tx + 2ty - 2xy\right\} dx\,dy =$$

$$= 2\sqrt{3} \iint\limits_{\Omega} \left\{\frac{1-t^2}{2} - \left[x^2+y^2-tx-ty+xy\right]\right\} dx\,dy = (*)$$

Здесь Ω — область из плоскости OXY, ограниченная линией

$$x^2+y^2+(t-x-y)^2 = 1,$$

или

$$x^2+y^2-tx-ty+xy = \frac{1-t^2}{2}.$$

Сделаем замену переменных $x = u+v$, $y = -u+v \Rightarrow I = 2$

$$x^2+y^2-tx-ty+xy = \cancel{u^2}+\cancel{2uv}+v^2+u^2-\cancel{2uv}+v^2-\cancel{tu}-tv+\cancel{tu}-tv+v^2-\cancel{u^2} =$$

$$= u^2+3v^2-2tv = u^2+3\left(v^2-2v\cdot\frac{t}{3}+\frac{t^2}{9}\right)-\frac{t^2}{3}$$

$$= u^2+3\left(v-\frac{t}{3}\right)^2-\frac{t^2}{3}$$

Пусть Ω_1 — область плоскости Ouv, ограниченная линией

$$u^2+3\left(v-\frac{t}{3}\right)^2 = \frac{3-t^2}{6}.$$

$$(*) = 4\sqrt{3}\iint\limits_{\Omega_1}\left\{\frac{1-t^2}{2}-\left[u^2+3\left(v-\frac{t}{3}\right)^2-\frac{t^2}{3}\right]\right\}du\,dv =$$

$$= 4\sqrt{3}\iint\limits_{\Omega_1}\left\{\frac{3-t^2}{6}-\left[u^2+3\left(v-\frac{t}{3}\right)^2\right]\right\}du\,dv = (*)$$

Сделаем замену переменных:

$$\begin{cases} u' = u \\ v' = \sqrt{3}v - \frac{t}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow I' = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Область Ω_1 переходит в область Ω_2, ограниченную линией

$$u'^2 + v'^2 = \frac{3-t^2}{6}$$

$$(*) = 4\iint\limits_{\Omega_2}\left\{\frac{3-t^2}{6}-\left[u'^2+v'^2\right]\right\}du'dv' =$$

$$= \left| \begin{matrix} u' = r\cos\varphi, & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ v' = r\sin\varphi, & 0 \le r \le \sqrt{\frac{3-t^2}{6}} \end{matrix} \right| =$$

$$= 4\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{\frac{3-t^2}{6}}}\left\{\frac{3-t^2}{6}-r^2\right\}r\,dr = 8\pi\int\limits_0^{\sqrt{\frac{3-t^2}{6}}}\left\{\frac{3-t^2}{6}-r^2\right\}r\,dr =$$

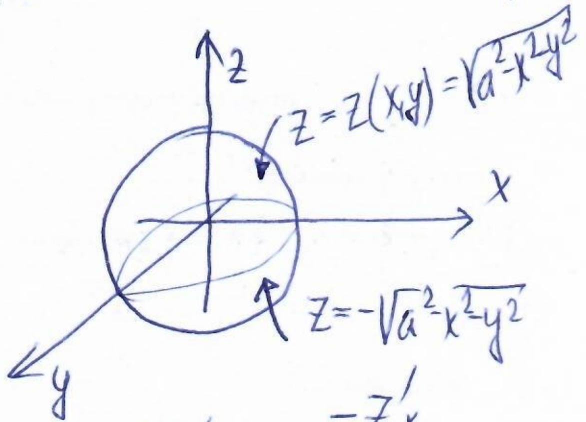
$$= \left| W = r^2 \right| = 4\pi\int\limits_0^{\frac{3-t^2}{6}}\left\{\frac{3-t^2}{6}-W\right\}dW = -2\pi\left(\frac{3-t^2}{6}-W\right)^2\Bigg|_0^{\frac{3-t^2}{6}} =$$

$$= \frac{\pi}{18}(3-t^2)^2.$$

Итак,

$$F(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{18}(3-t^2)^2, & \text{если } |t| \le \sqrt{3} \\ 0, & \text{если } |t| > \sqrt{3}. \end{cases}$$

(4362) $I = \iint\limits_{S} (z\,dx\,dy + x\,dy\,dz + y\,dz\,dx)$, где S – внешняя часть сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$



$$= \iint\limits_{S_+} (z\cos\gamma_+ + x\cos\alpha_+ + y\cos\beta_+)\,dS + \iint\limits_{S_-} (x\cos\alpha_- + y\cos\beta_- + z\cos\gamma_-)\,dS =$$

$$\cos\alpha_+ = \frac{-z'_x}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}} \qquad \cos\beta_+ = \frac{-z'_y}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}} \qquad \cos\gamma_+ = \frac{1}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}$$

$$\cos\alpha_- = \frac{z'_x}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}} \qquad \cos\beta_- = \frac{z'_y}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}} \qquad \cos\gamma_- = \frac{-1}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}$$

$$= \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}{\cancel{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}} - \frac{x z'_x}{\cancel{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}} - \frac{y z'_y}{\cancel{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}} \right) \times \cancel{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}\,dx\,dy +$$

$$+ \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{x z'_x}{\cancel{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}} + \frac{y z'_y}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}} + \frac{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}{\cancel{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}} \right) \times \cancel{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}\,dx\,dy =$$

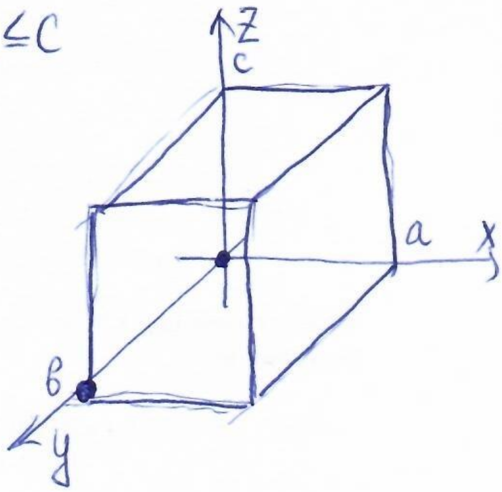
$$= 2\iint\limits_{\Omega} \left(\sqrt{a^2-x^2-y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \right) dx\,dy =$$

$$= 2a^2 \iint\limits_{\Omega} \frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = \left/ \begin{matrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{matrix} \right/ = 2a^2 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}} = -a^2 \cdot 2\pi \int\limits_0^a \frac{d(a^2-r^2)}{\sqrt{a^2-r^2}} =$$

$$= -4\pi a^2 \sqrt{a^2-r^2}\Big|_0^a = 4\pi a^3.$$

$\boxed{4363}$

$\iint\limits_S f(x)dydz + g(y)dzdx + h(z)dxdy$, де S - внешняя сторона поверхности: $0\le x\le a$, $0\le y\le b$, $0\le z\le c$



$$= \iint\limits_{S^+}\left(f(x)\cos\alpha + g(y)\cos\beta + h(z)\cos\gamma\right)ds$$

$z=0$: $\bar{n}=(0;0;-1)$: $-\iint\limits_{\Omega} h(z)dxdy = -h(0)ab$

$z=c$; $\bar{n}=(0;0;1)$: $\iint\limits_{\Omega} h(z)dxdy = h(c)ab$

$y=0$: $\bar{n}=(0;-1;0)$: $-\iint\limits_{\Omega} g(y)dxdz = -g(0)ac$

$y=b$; $\bar{n}=(0;1;0)$: $\iint\limits_{\Omega} g(y)dxdz = g(b)ac$

$x=0$: $\bar{n}=(-1;0;0)$: $-\iint\limits_{\Omega} f(x)dydz = -f(0)bc$

$x=a$; $\bar{n}=(1;0;0)$: $\iint\limits_{\Omega} f(x)dydz = f(a)bc$

$I = ab\left(h(c)-h(0)\right) + bc\left(f(a)-f(0)\right) + ca\left(g(b)-g(0)\right)$.

Дома: №№ 4341, 4350, 4352.1, 4360, 4365, 4366.

№4341 Найти $I_1 = \iint\limits_{S_1} (x^2+y^2+z^2)ds$ и $I_2 = \iint\limits_{S_2} (x^2+y^2+z^2)ds$, где S_1 — поверхность сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$, S_2 — поверхность октаэдра $|x|+|y|+|z|=a$, вписанного в эту сферу.

$$I_1 = 2\iint\limits_{\substack{S_1\\ z\geq 0}} (x^2+y^2+z^2)ds = 2\iint\limits_{x^2+y^2\leq a^2} (x^2+y^2+a^2-x^2-y^2)\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy =$$

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \Rightarrow z'_x = -\frac{x}{z},\ z'_y = -\frac{y}{z} \Rightarrow ds = \frac{a}{z}dxdy \Rightarrow$$

$$= 2a^3\iint\limits_{x^2+y^2\leq a^2}\frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = \left| \begin{matrix} x=r\cos\varphi, & 0\leq\varphi\leq 2\pi \\ y=r\sin\varphi, & 0\leq r\leq a\end{matrix}\right| = 2a^3\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\frac{rdr}{\sqrt{a^2-r^2}} =$$

$$= -4a^3\pi\sqrt{a^2-r^2}\Big|_0^a = 4\pi a^4. \Rightarrow I_1 = 4\pi a^4.$$

Октаэдр симметричен относительно всех координатных плоскостей $\Rightarrow$

$$I_2 = 8\iint\limits_{\substack{S_2\\ x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0}}(x^2+y^2+z^2)ds = 8\sqrt{3}\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+[a-x-y]^2)dxdy =$$

$$z=a-x-y \Rightarrow z'_x=-1,\ z'_y=-1 \Rightarrow ds=\sqrt{3}dxdy$$

$$= 8\sqrt{3}\int_0^a dx \left\{x^2y+\frac{y^3}{3}-\frac{(a-x-y)^3}{3}\right\}\Big|_0^{a-x} = 8\sqrt{3}\int_0^a\left\{x^2(a-x)+\frac{2(a-x)^3}{3}\right\}dx =$$

$$= 8\sqrt{3}\left(\frac{a^4}{3}-\frac{a^4}{4}+\frac{a^4}{6}\right) = 8\frac{\sqrt{3}}{4}a^4 = 2\sqrt{3}a^4. \Rightarrow I_2 = 2\sqrt{3}a^4.$$

№4350 Найти $I = \iint\limits_S (xy+yz+zx)ds$, где S — часть конической поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, вырезанная поверхностью $x^2+y^2=2ax$.

Поверхность S проектируется на круг $D=\{(x;y):\ (x-a)^2+y^2\leq a^2\}$, а $ds=\sqrt{2}dxdy \Rightarrow$

$$I = \sqrt{2}\iint\limits_D (xy+(x+y)\sqrt{x^2+y^2})dxdy = \left|\begin{matrix} x=r\cos\varphi, & -\frac{\pi}{2}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2} \\ y=r\sin\varphi, & 0\leq r\leq 2a\cos\varphi\end{matrix}\right|$$

$$= \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\varphi\cos\varphi+\sin\varphi+\cos\varphi)d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^3dr =$$

$$= 4\sqrt{2}a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left([\cos^5\varphi + \cos^4\varphi] \sin\varphi + \cos^5\varphi \right) d\varphi = 8\sqrt{2}a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\varphi \, d\varphi = \frac{64\sqrt{2}}{15} a^4.$$

$$I = \frac{64\sqrt{2}}{15} a^4.$$

N 4352.1 Найти массу полусферы $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z \geq 0$, плотность которой в каждой точке равна $\frac{z}{a}$.

Искомая масса определяется формулой $\iint\limits_S \frac{z}{a} ds$.

$$z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}, \quad z'_x = -\frac{x}{z}, \quad z'_y = -\frac{y}{z} \Rightarrow$$

$$ds = \frac{a}{z} dxdy \Rightarrow \iint\limits_S \frac{z}{a} ds = \iint\limits_{x^2+y^2 \leq a^2} \frac{z}{a} \cdot \frac{a}{z} dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2 \leq a^2} dxdy = \pi a^2. \Rightarrow$$

$$\iint\limits_S \frac{z}{a} ds = \pi a^2.$$

N4360 Вычислить $F(t) = \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x,y,z) ds$, где

$$f(x,y,z) = \begin{cases} x^2+y^2, & \text{если } z \geq \sqrt{x^2+y^2} \\ 0, & \text{если } z < \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

По определению функции $f(x,y,z)$

$$\iint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2=t^2 \\ z<0}} f(x,y,z) ds \equiv 0 \Rightarrow$$

$$F(t) = \iint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2=t^2 \\ z\geq 0}} f(x,y,z) ds = \iint\limits_{x^2+y^2 \leq t^2} f(x,y,\sqrt{t^2-x^2-y^2}) \frac{|t|}{\sqrt{t^2-x^2-y^2}} dxdy =$$

$$z = \sqrt{t^2-x^2-y^2}, \quad z'_x = -\frac{x}{z}; \quad z'_y = -\frac{y}{z} \Rightarrow$$

$$ds = \sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}} dxdy = \frac{|t|}{z} = \frac{|t|}{\sqrt{t^2-x^2-y^2}}$$

$$= \left| \begin{matrix} x = r\cos\varphi, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ y = r\sin\varphi, & 0 \leq r \leq |t| \end{matrix} \right| = |t| \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{|t|} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, \sqrt{t^2-r^2}) \frac{r\,dr}{\sqrt{t^2-r^2}} = (*)$$

$$f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, \sqrt{t^2-r^2}) = \begin{cases} r^2, & \sqrt{t^2-r^2} \geq r \\ 0, & \sqrt{t^2-r^2} < r \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, \sqrt{t^2-r^2}) = \begin{cases} r^2, & r \leq \frac{|t|}{\sqrt{2}} \\ 0, & r > \frac{|t|}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$(*) = |t| \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{|t|}{\sqrt{2}}} \frac{r^3}{\sqrt{t^2-r^2}}\, dr = 2\pi|t| \int\limits_0^{|t|/\sqrt{2}} \frac{r^3\, dr}{\sqrt{t^2-r^2}} = |w = r^2| =$$

$$= \pi|t| \int\limits_0^{t^2/2} \frac{w\, dw}{\sqrt{t^2-w}} = \pi|t| \left\{ 2w\sqrt{t^2-w}\,\Big|_{t^2/2}^{0} - 2\cdot\frac{2}{3}(t^2-w)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{t^2/2} \right\} =$$

$$= \pi t^4 \frac{4\sqrt{2}-5}{3\sqrt{2}} = \pi \frac{8-5\sqrt{2}}{6} t^4 \Rightarrow F(t) = \pi \frac{8-5\sqrt{2}}{6} t^4.$$

№4365 Найти $I = \iint\limits_S \left(\frac{dydz}{x} + \frac{dxdz}{y} + \frac{dxdy}{z} \right)$, где S – внешняя сторона эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Рассмотрим интеграл $I_1 = \iint\limits_S \frac{dxdy}{z}$

Плоскость $z=0$ пересекается с эллипсоидом S по эллипсу $\gamma = \left\{ (x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$, являясь гладким краем компактов

$$S^+ = \left\{ (x,y,z) : z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},\ (x,y) \in D \right\}$$

$$S^- = \left\{ (x,y,z) : z = -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},\ (x,y) \in D \right\}$$

$$D = \left\{ (x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

Ориентация кривой γ должна быть согласована с ориентацией многообразий $S^+|\gamma$ и $S^-|\gamma$. Эти ориентации противоположны $\Rightarrow$

$$I_1 = \iint\limits_{S^+} \frac{dxdy}{z} + \iint\limits_{S^-} \frac{dxdy}{z} = \iint\limits_D \frac{dxdy}{z^+} - \iint\limits_D \frac{dxdy}{z^-} = \frac{2}{c} \iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} =$$

$$= \left| \begin{matrix} x = ar\cos\varphi, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ y = br\sin\varphi, & 0 \leq r \leq 1 \end{matrix} \right| = \frac{2ab}{c} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \frac{r\, dr}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{4\pi ab}{c}$$

Аналогичными рассуждениями показывается, что

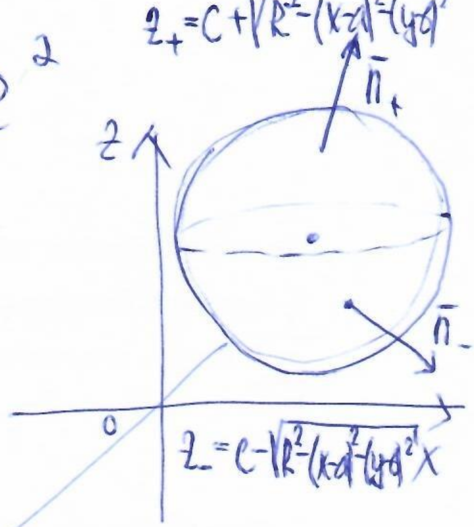
$$I_2 = \iint\limits_S \frac{dydz}{x} = \frac{4\pi bc}{a}, \quad I_3 = \iint\limits_S \frac{dxdz}{y} = \frac{4\pi ac}{b} \Rightarrow$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{4\pi}{abc}\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right).$$

4366. $\iint\limits_S x^2\,\underbrace{dydz}_{\cos\alpha} + y^2\,\underbrace{dzdx}_{\cos\beta} + z^2\,\underbrace{dxdy}_{\cos\gamma} =$

$S:\ (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

$\frac{8\pi}{3}(a+b+c)R^3$ – ответ



"+" $\cos\alpha_+ = \pm\frac{z'_x}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}} = -\frac{z'_x}{\sqrt{\ldots}}$

$\cos\beta_+ = \pm\frac{z'_y}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}} = -\frac{z'_y}{\sqrt{\ldots}}$

$y \quad z'_x = \frac{-(x-a)}{\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}}$

$\cos\gamma_+ = \pm\frac{-1}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\ldots}}$

$z'_y = \frac{-(y-b)}{\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}}$

"−" $\cos\alpha_- = \frac{z'_x}{\sqrt{\ldots}}$

$\cos\beta_- = \frac{z'_y}{\sqrt{\ldots}}$

$z'_x = \frac{(x-a)}{\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}}$

$z'_y = \frac{(y-b)}{\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}}$

$\cos\gamma_- = -\frac{1}{\sqrt{\ldots}}$

$$\overset{S_+:}{=} \iint\limits_D \left(\frac{-x^2 z'_x}{\cancel{\sqrt{\ldots}}} + \frac{-y^2 z'_y}{\cancel{\sqrt{\ldots}}} + \frac{z^2}{\cancel{\sqrt{\ldots}}}\right)\cancel{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}\,dxdy +$$

$$+ \overset{S_-:}{\iint\limits_D} \left(\frac{x^2 z'_x}{\cancel{\sqrt{\ldots}}} + \frac{y^2 z'_y}{\cancel{\sqrt{\ldots}}} + \frac{-z^2}{\cancel{\sqrt{\ldots}}}\right)\cancel{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} \left[2\frac{x^2(x-a)+y^2(y-b)}{\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}} + \left(c+\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(c-\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\right)^2 \right] dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} \left\{ 2\,\frac{x^2(x-a)+y^2(y-b)}{\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}} + 4c\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2} \right\} dxdy$$

$$\Omega:\ (x-a)^2+(y-b)^2 \le R^2 \quad \left[\begin{array}{ll} x = a + r\cos\varphi & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ y = b + r\sin\varphi & 0 \le r \le R \end{array} \right. \quad I = r$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \left\{ \frac{(a+r\cos\varphi)^2 \cdot r\cos\varphi + (b+r\sin\varphi)^2 r\sin\varphi}{\sqrt{R^2-r^2}} + 2c\sqrt{R^2-r^2} \right\} r\,dr$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \left(\frac{(a^2+2ar\cos\varphi + r^2\cos^2\varphi)\, r\cos\varphi + (b^2+2br\sin\varphi + r^2\sin^2\varphi)\, r\sin\varphi}{\sqrt{R^2-r^2}} \right.$$

$$\left. \cancel{+2c(R^2-r^2)} + 2cr\sqrt{R^2-r^2} \right) dr$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{\cancelto{0}{(a^2\cos\varphi + b^2\sin\varphi)}\, r^2 + ar^3\left(1+\cancelto{0}{\cos 2\varphi}\right) + br^3\left(1-\cancelto{0}{\cos 2\varphi}\right) + r^4\cancelto{0}{\cos^3\varphi} + r^4\cancelto{0}{\sin^3\varphi}}{\sqrt{R^2-r^2}}\, dr + 8\pi c\int_0^R r\sqrt{R^2-r^2}\, dr =$$

$$= 4\pi\int_0^R (a+b)\frac{r^3}{\sqrt{R^2-r^2}}\, dr - 4\pi c\int_0^R \sqrt{R^2-r^2}\, d(R^2-r^2) = I_1 + I_2$$

$$I_2 = -\frac{8\pi c}{3}\left(R^2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^R = \frac{8\pi c}{3}R^3.$$

$$I_1 = 4\pi(a+b)\int_0^R \frac{r^3}{\sqrt{R^2-r^2}}\,dr = -2\pi(a+b)\int_0^R \frac{r^2\,d(R^2-r^2)}{\sqrt{R^2-r^2}} =$$

$$= 2\pi(a+b)\int_0^R \frac{(R^2-r^2)\,d(R^2-r^2)}{\sqrt{R^2-r^2}} - 2\pi(a+b)R^2\int_0^R \frac{d(R^2-r^2)}{\sqrt{R^2-r^2}} =$$

$$= \frac{4\pi}{3}(a+b)\left(R^2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^R - 4\pi(a+b)R^2\sqrt{R^2-r^2}\Big|_0^R =$$

$$= -\frac{4\pi}{3}(a+b)R^3 + 4\pi(a+b)R^3 = \frac{8\pi}{3}(a+b)R^3.$$

$$I = \frac{8\pi}{3}(a+b+c)R^3.$$